Questions de cours

- Inégalité d'Heisenberg (principe d'indétermination) $\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ impossibilité localiser position/impulsion simultanément

$\Delta E \, \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ idem pour énergie

$\Rightarrow$ loi de la nature et NON impossibilité technique (théorie des distributions)

- Etats liés/libres (diffusifs) $E > 0$ (collisions entre particules)

$E < 0$ (ex : e^- ds atome)

- $\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$ avec $\underbrace{\hat{X}}_{\text{sans dim}} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\underbrace{X}_{\text{en m}}$ et $\underbrace{\hat{P}}_{\text{sans dim}} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\,\underbrace{P}_{\text{en kg m s}^{-1}}$; $H = \hbar\omega\hat{H}$

$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a)$ et $\hat{P} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^+ - a)$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$ et $a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$

$$[a, a^+] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left[(\hat{X} + i\hat{P}), (\hat{X} - i\hat{P})\right] = \frac{1}{2}\left(\cancel{[\hat{X}, \hat{X}]} - i\underbrace{[\hat{X}, \hat{P}]}_{i} + i\underbrace{[\hat{P}, \hat{X}]}_{-i} + \cancel{[\hat{P}, \hat{P}]}\right) = 1$$

ou $a a^+ - a^+ a = 1$

$$a^+ a = \frac{1}{2}(\hat{X} - i\hat{P})(\hat{X} + i\hat{P}) = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 + \underbrace{i\hat{X}\hat{P} - i\hat{P}\hat{X}}_{i\underbrace{[\hat{X}, \hat{P}]}_{i}}) = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 - 1) = \hat{H} - \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \hat{H} = a^+ a + \frac{1}{2}$

- $[L^2, L_3] = 0$ $L^2 \Rightarrow l(l+1)\hbar^2$

$L_3 \Rightarrow m\hbar$

Ex 1

Remarques

I) 1) Eq. de Schroedinger pour états stationnaires : $\boxed{\hat{H}\phi_0(x) = E_0\phi_0(x)}$ (1)

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial x} = -\frac{x}{b^2}\left(\frac{1}{\pi b^2}\right)^{1/4}\exp(-x^2/2b^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{b^2}+\frac{x^2}{b^4}\right)\left(\frac{1}{\pi b^2}\right)^{1/4}\exp(-x^2/2b^2)$$

si $\hat{H}\psi_0$ est faux mais que $\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2}$ est juste : compter (2) pts
si seul $\frac{\partial\phi_0}{\partial x}$ est juste ⇒ (1) pt

$$\Rightarrow \boxed{\hat{H}\phi_0 = \frac{\hbar^2}{2mb^2}\phi_0 + \left(\frac{1}{2}m\omega^2 - \frac{\hbar^2}{2mb^4}\right)x^2\phi_0} \quad (3)$$

$$\hat{H}\phi_0 = E_0\phi_0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{mb^4} \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{\frac{\hbar^2}{m\omega}}} \quad (1) \\ E_0 = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \end{cases}$$

---

2) $E_0 = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \Longrightarrow E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ (1)

---

3) • $[\hbar] = \text{Energie} \times \text{Temps} = ML^2T^{-2} \times T = ML^2T^{-1}$

$[\omega] = T^{-1}$

$$\rightarrow [b] = \left(\frac{ML^2T^{-1}}{MT^{-1}}\right)^{1/2} = L$$

si $[b] = L$ mais pas d'explication : 1 seul pt.

• ou bien : dans $\exp\left\{-\frac{x^2}{2b^2}\right\}$ il faut (2)

que $\frac{-x^2}{2b^2}$ soit sans dimension $\Rightarrow \boxed{[b] = L}$

---

4) $$\frac{\partial\phi_1}{\partial x} = \left(\frac{4}{\pi b^6}\right)^{1/4}\exp(-x^2/2b^2) - \frac{x}{b^2}\left(\frac{4}{\pi b^6}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} = -\frac{x}{b^2}\left(\frac{4}{\pi b^6}\right)^{1/4}\exp(-x^2/2b^2) - \frac{2x}{b^2}\left(\frac{4}{\pi b^6}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) + \frac{x^2}{b^2}\left(\frac{4}{\pi b^6}\right)^{1/4}\frac{x}{b^2}\exp(-x^2/2b^2) \quad (3)$$

même remarque qu'en I-1.
s'ils font d'entrée le calcul avec $b = \sqrt{\frac{\hbar^2}{m\omega}}$ et obtiennent $\hat{H}\psi_1 = E_1\psi_1$ compter 4 pts.

$$\rightarrow \boxed{\hat{H}\phi_1 = \frac{3}{2}\frac{\hbar^2}{mb^2}\phi_1(x) + \left(\frac{1}{2}m\omega^2 - \frac{\hbar^2}{2mb^4}\right)x^2\phi_1(x)} \quad (1)$$

$\hat{H}\phi_1 = E_1\phi_1 \rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2 = \frac{\hbar^2}{2mb^4} \rightarrow$ $\boxed{\text{on retrouve } b = \sqrt{\frac{\hbar^2}{m\omega}}}$

---

5) $E_1 = \frac{3}{2}\frac{\hbar^2}{mb^2} \Rightarrow E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$

Ex2

1/ L'électron classique est totalement réfléchi et ne pénètre pas dans la région $x>0$

2/ $\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$, ES $\psi = \varphi e^{-iEt/\hbar}$

$\rightarrow \boxed{\hat{H}\varphi = E\varphi} \Rightarrow \varphi = \varphi_I \cup \varphi_{II}$

3/ $\hat{H}\varphi_I = E\varphi_I \Rightarrow \varphi_I'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi_I = 0$; $k_I^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0$

$\hat{H}\varphi_{II} = E\varphi_{II} \Rightarrow \varphi_{II}'' - \frac{2m}{\hbar^2}\underbrace{(V_0 - E)}_{>0}\varphi_{II} = 0$; $k_{II}^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) > 0$

4/ $\varphi_I = A_I e^{ik_I x} + B_I e^{-ik_I x}$ $x<0$ | ← acceptable

$\varphi_{II} = A_{II} e^{-k_{II} x} + \cancel{B_{II} e^{+k_{II} x}}$ $x>0$ | $\varphi_{II} = A_{II} e^{-k_{II} x}$

5/ $\varphi_I(0) = \varphi_{II}(0)$ et $\varphi_I'(0) = \varphi_{II}'(0)$

6/ $\begin{cases} A_I + B_I = A_{II} \times \quad k_{II} \times ik_I \\ ik_I(A_I - B_I) = -k_{II} A_{II} \end{cases}$

7/ $r = \frac{B_I}{A_I} \Rightarrow A_I(ik_I + k_{II}) - B_I(ik_I - k_{II}) = 0$

$$\boxed{r = \frac{ik_I + k_{II}}{ik_I - k_{II}}}$$

8/ $$\boxed{R = |r|^2 = \frac{k_I^2 + k_{II}^2}{k_I^2 + k_{II}^2} = 1}$$